A Josephus-probléma

Egy túlélés matematikája

NAGY ÁDÁM
Révai Miklós Gimnázium, Győr

Egy legenda érdekes matematikai problémát kapcsolt az élet vagy halál kérdéséhez. A történeti hűség kedvéért a pályázatban a szerző a feladat ókori megszövegezését mutatja be, amit megőriztünk az írásban, annak ellenére, hogy a matematikai tartalmat a ma szokásos módon játék keretében, kiszámolással és kieséssel is be lehetne mutatni (*a szerkesztők megjegyzése*).

A legenda Josephus Flavius ókori történetíró és társa túléléséről szól, akik a zsidó-római háború során tagjai voltak egy 41 fős lázadó csoportnak. A lázadókat a rómaiak tőrbe csalták egy barlangban. Mivel ekkor a Római Birodalomban rabszolgatartás volt – már a Spartacus vezette rabszolgafelkelést is több mint 100 évvel korábban leverték –, a csoport többsége úgy döntött, inkább öngyilkosságot követ el, minthogy a rómaiak megöljék őket, vagy alkut kössenek velük, hiszen az alkukötés valószínűleg hadifogsággal vagy rabszolgasággal járt volna. Így aztán az öngyilkosság mellett döntöttek, amit különleges módon próbáltak meg végrehajtani: körbeálltak, és minden 3. ember öngyilkos lett.

Josephus Flavius

Josephusnak és társának azonban nem állt szándékában önként véget vetni életének, ezért kiszámolták, hova kell állniuk a körben ahhoz, hogy ők legyenek az utolsók, és miután a többiek öngyilkosok lettek, kedvező alkut kössenek a rómaiakkal.

A legendáról maga Josephus kissé homályosan nyilatkozik, bővebben tárgyalják azonban *Israel Nathan Herstein* és *Irving Kaplansky* matematikusok[1] (akik érdekes módon a XX. században éltek, így talán egy kissé hiteltelennek tűnhet leírásuk). A továbbiakban a probléma általánosítását vizsgáljuk.

Josephus Flavius élete

Josephus Flavius (családi nevén József ben Matitjáhu) Jeruzsálemben született i. sz. 37–38-ban és Rómában halt meg i. sz. 100 körül. Josephus arámi és görög nyelven alkotó római zsidó történetíró és teológus volt. Előkelő papi családból származott, már fiatal korában a zsidó írásmagyarázat szadduceus, esszénus és farizeus irányzatait tanulmányozta.

Egy küldöttség tagjaként 64-ben Rómában járt, ahol megismerkedhetett Néró római császárral és udvartartásával. Ezután a birodalom híveként tért vissza hazájába, ám ennek ellenére csatlakozott a 66-ban Róma ellen kitört felkeléshez. A kormányzat megbízásából magára vállalta Galilea védelmének megszervezését, emiatt valószínűleg elvesztette társai bizalmát, így figyelmét inkább arra fordította, hogy átállásának útját egyengesse. Amikor a parancsnoksága alá tartozó Jotapata vára elesett – az öngyilkosságot választó társait kijátszva –, Vespasianus kezébe került. (Érdekes, hogy a legenda barlangról szól, nem pedig várról.) A hadvezér kegyelmét leírása szerint azzal nyerte el, hogy megjósolta a hadvezérnek a császári hatalmat. A továbbiakban a rómaiak oldalán maradt, sőt segített a felkelés leverésében. Három évvel később, amikor Vespasianus (69–79) hatalomra került, elnyerte szabadságát és polgárjogot is kapott, ekkor vette fel a Josephus Flavius nevet. Érdekes, hogy a Flavius annak a császári dinasztiának a neve is volt, melynek első tagja Vespasianus. Ezután életét az irodalomnak szentelte. Halála után szobrot állítottak neki Rómában.

Munkásságának fő célja az volt, hogy javítsa a rómaiak és a zsidók kapcsolatát, illetve meggyőzze a zsidóságot Róma legyőzhetetlenségéről. Politikailag különbözőképpen ítélik meg, de mint történetírót, hitelesnek fogadják el. A római-zsidó háború egyik legmegbízhatóbb forrása.

Első műve a zsidó háborúról szól (*Bellum Judiacum*). Ebben leírja a hivatalos római álláspontot a háború okairól, jellegéről és lefolyásáról. Másik fő műve a húsz fejezetből álló *Antiquitates Judaicae*, magyarul *A zsidók története*. Érdekes a mű függeléke (az *Önéletrajz* címet viseli), amelyben a tiberiasi Justusnak – kortárs történetíró – vádjait próbálja cáfolni galileai tevékenységével kapcsolatban. Hasonló műve a *Contra Apionem*, melyben Apión iratára ad feleletet.

Hatása az utókorra rendkívül jelentős, műveit számos nyelvre lefordították.

Ki lesz a túlélő?

A levezetés első része – amíg minden második ember kivégzéséről van szó – a [2]. forrás alapján készült. Első lépésben a „résztvevők" számát vegyük n-nek (összesen n ember, az első sorszáma 1), és minden másodikat végezzük ki, míg végül egy ember marad.

Első példánk legyen n=10. Ekkor az első körben kivégzettek sorszámai: 2, 4, 6, 8 és 10, tehát a páros számok. Második körben – mivel már csak a páratlan számok maradtak – minden második páratlan sorszámú ember kerül sorra: 3, 7. Már csak hárman maradtak, az 1-es, az 5-ös és a 9-es. A 9. kimarad, így a második még szabad szám az 1-es. Kivégezzük. A következő az 5-ös, de kimarad, így a kilences is kiszáll a játékból. Így kapjuk meg, hogy az eredetileg 5-ös számú ember fogja túlélni. A továbbiakban egyszerűsített jelölés kedvéért: $J(10)=5$.

Értsd: 10 ember esetén a Josephus-„függvény" eredménye 5.

Nézzük meg az eredményt n=1-től 6-ig:

n	1	2	3	4	5	6
J(n)	1	1	3	1	3	5

Észrevehetjük, hogy $J(n)$ mindig páratlan. Ezt könnyű belátnunk, hiszen már az első körben kiesnek a páros sorszámú emberek.

Ezen kívül, ha n maga is páros, akkor az első kör után egy az elsőhöz nagyon hasonlító helyzetet kapunk, kivéve, hogy fele annyi ember van, és megváltozott a sorszámuk. Az első körbejárás után a sorszámok változása:

1.	1	≥	1
2.	2	≥	3
3.	3	≥	5
….			
n.	n	≥	2n - 1

Tehát minden ember eredeti sorszáma a mostani helyének kétszereséből egy. Képlettel:

$$J(2n) = 2J(n)-1, \qquad \text{ha } n \geq 1$$

Már tudjuk, hogy $J(10)=5$, így például

$$J(20) = 2 \bullet J(10) - 1 = 2 \bullet 5 - 1=9$$

Amennyiben n páratlan, az első kör után rögtön kiesik az 1-es, így a második körben a sorszámok eggyel előbbre csúsznak, és n-ből $2n+1$ lesz. Így:

$$J\,(2n+1) = 2J(n)+1, \qquad \text{ha } n \geq 1$$

Ezt a két egyenletet $J(1)=1$-gyel kombinálva, rekurzióval lefedhetjük az összes számot:

1 [2] – 8. oldal

$J(1)=1$
$J(2n)=2J(n)-1, \quad \text{ha } n \geq 1$
$J(2n+1)= 2J(n)+1, \quad \text{ha } n \geq 1$

A rekurzió hatékonynak mondható, mivel nem elemenként lépked, hanem közel feleződik, így például $J(1000000)$-hez „csupán” 19-szer kell alkalmazni.

Alkossunk táblázatot a kisebb értékekre, hátha észreveszünk benne valamilyen mintázatot!

Ha a *táblázatot* megfelelően csoportosítjuk, észrevehetjük, hogy 2 hatványainál a túlélő sorszáma mindig 1, és a következő hatványig kettesével nő. Tehát, ha n-et $n=2^m+l$ alakban írjuk fel, ahol 2^m a legmagasabb hatványa 2-nek, ami még kisebb a számnál, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$J(2^m+l)=2\bullet l+1, \text{ ha } m \geq 0 \text{ és } 0 \leq l < 2^m$$

Ezt igazolnunk kell, és ezt teljes indukcióval tesszük. (A szerző a bizonyítást külön végezte el páros és páratlan számokra, $n=0$-val kezdve, amelyet annak hosszadalmassága miatt nem közlünk – *a szerkesztők megjegyzése*.)

Így már könnyen kiszámolhatjuk például $J(100)$-at:

$100 = 64 + 36 = 2^6+ 36$
$J(100) = 2 \bullet 36 + 1= 73$

Mivel a megoldásban nagy szerepe volt kettő hatványainak, ezért érdemes és érdekes megvizsgálni a problémát binárisan. A folyamatot n bináris felírásával kezdjük:

$$n=(b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2=b_m \bullet 2^m+b_{m-1} \bullet 2^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+b_1 \bullet 2+b_0$$

b_m értéke biztosan 1, hiszen ez 2 azon legnagyobb hatványa, amely nem nagyobb n-nél. Innen:

$n=(1b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2$ / fentiek miatt

$l=(0b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2$ /hiszen ha n-ből levonjuk $b_m \bullet 2^m$-et, akkor pontosan l-t kapjuk – ez volt a feltevésünk

$2l=(b_{m-1} \ldots b_1 b_0 0)_2$ /hiszen ha l-t megszorozzuk kettővel, bináris leírásában csak odébb csúsznak a számok, az utolsó helyiértékre pedig biztosan 0 kerül, hiszen páros számról van szó

$2l+1= (b_{m-1} \ldots b_1 b_0 1)_2$ /hozzáadva $2l$-hez egyet az csak az utolsó helyiértéket változtatja meg, hiszen $2l$ páros szám volt, és mivel

$J(n)=2l+1$ és $b_m=1$ kapjuk, hogy:

$$J(n)= (b_{m-1} \ldots b_1 b_0 b_m)_2$$

Vagyis $J(n)$-et n-ből binárisan úgy kapjuk, hogy balra léptetjük egy bittel. Ez rendkívül gyors és egyszerű számítás, de még mindig nem tudjuk, mi a helyzet, ha nem kettesével, hanem például hármasával léptetünk (minden harmadik ember hal meg, mint a legenda szerint).

Ehhez más megközelítést alkalmazunk, mégpedig a dinamikus programozásnak nevezett módszert. Ennek lényege, hogy a különböző lépések sorrendjéről úgy döntünk, hogy a szükséges idő a lehető legrövidebb legyen. A programozás szónak itt semmi köze nincs a számítógépes programozáshoz, inkább az optimalizáció a megfelelő kifejezés.

Legyen az emberek száma n, a léptetés pedig k, illetve $f(n,k)$ függvény, ami megadja a túlélő sorszámát. Ekkor:

$$f(n,k)=f(n-1,k) + k \bmod n \text{ és } f(1,k)=1$$

Tehát $f(n,k)$-t úgy kapjuk, hogy megnézzük, milyen eredményt kapunk $f(n-1,k)$-ra, majd ehhez hozzáadjuk k-t. Amennyiben ez a szám nagyobb n-nél, vonjuk ki belőle n-t (a képlet szerint vegyük n-nel való osztásának maradékát (modulus), de ez a kettő esetünkben egyenlő).

(Az egyetlen túlélő tehát az elemszám és a kezdő elem ismeretében egyértelműen előre megadható. A szerző által megírt program a következő lapon olvasható: *http://josephus.srcms.biz – a szerkesztők megjegyzése*.)

IRODALOM

[1] Josephus Flavius: *A zsidók története (XI–XX. könyv)*. Gondolat Könyvkiadó. Talentum Kft., Budapest, 1994.
[2] Donald E. Knuth – Ronald Graham – Oren Patashnik: *Konkrét matematika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998, 8–16. oldal
[3] Petz Vilmos: *Ókori lexikon*. Franklin Kiadó, Budapest, 1902–1904.

Az írás szerzője diákpályázatunkon a Martin Gardner által alapított Matematika kategóriában I. díjat kapott.

Táblázat

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5

A sziki kocsord nyomában

NAGY-SZENTESI PÉTER
Szentannai Sámuel Mezőgazdasági Szakközépiskola, Gimnázium és Kollégium, Karcag

„… a nagyobb sokszínűség nagyobb rendet teremt.”
(Friedrick A. von Hayek)

A szakirodalom tanulmányozásából tudtam meg, hogy a Nagy-Sárréten tizenöt sziki kocsordos élőhelyet találtak eddig a kutatók, és hogy a Szerep határában található Madarasi-gyepen is fellelhető e faj, illetve tápnövény-specialistája, a nagy szikibagoly *(Gortynia borelii)*. Ennek köszönhető, hogy felkerestem az adott területet és elkezdtem a kutakodást. Tavaszi, nyári és őszi aspektusában egyaránt figyelemmel kísértem a termőhelyet, rendszeres feljegyzéseket készítettem, és a látottakat fotókkal dokumentáltam. Igyekeztem információkat gyűjteni a táj, az adott gyep élővilágáról, használatáról, történetéről.

A sziki kocsord (*Peucedanum officinale*) sokfelé előfordul Európában: Nagy-Britanniától Portugáliáig, Olaszország középső részéig, valamint Albániáig, és Görögország északi részéig. Kelet felé pedig Dél-Szibériáig mind a síksági, mind a dombvidéki, de még a montán régióban is. Jelenlegi ismereteink szerint a Pannon életföldrajzi régióban a legelterjedtebb a faj. A sziki kocsord nagytermetű, lágyszárú, évelő növény. Hazánkban őshonos. Magassága nagyon változó: 50–200 cm. Szára felálló, egyenes, sima vagy gyengén szögletes, kemény, felül elágazó, sárgászöld, esetleg pirosló színű. Szürkészöld tőlevelei 30–60 cm hosszúak, félgömböt alkotnak. Répaszerű gyöktörzset képez. A lomblevelek szórt állásúak, osztottak, levélnyelük kiszélesedő. Levélkéi többé-kevésbé háromszög kerületűek, 2–6 szorosan hármasával állók, 4–15 cm hosszúak, 1–3 mm szélesek, hegyesek, szála-